TEMA 6: DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS (MATRICES CUADRADAS)

INTRODUCCIÓN

EL PROBLEMA DE AUTOVALORES

Dada una matriz cuadrada A, se llama problema de autovalores al problema que consiste en encontrar todos los escalares λ y todos los vectores NO NULOS $\vec{v}$ tales que

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Al escalar $\lambda \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se le llama autovalor (eigenvalue) y al vector $\vec{v}$ asociado, autovector (eigenvector).

Supongamos que A es de tamaño $N \times N$ y supongamos también que existen N autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ con sus correspondientes autovectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$.

¿Qué significa el problema de autovalores $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ desde el punto de vista de las aplicaciones lineales?

Vimos en el tema anterior que dada $A \in M_{N\times N}$ existe una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

de modo que

$$A = M_{C \to C}(f)$$

siendo C la base canónica de $\mathbb{R}^N$.

Por tanto, el problema de autovalores $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ es el mismo que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

En la situación anterior donde existen $\lambda_1, .., \lambda_N$ autovalores con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, .., \vec{v}_N$ autovectores, veremos que estos autovectores forman una base de $\mathbb{R}^N$, que denotamos por $B = \{\vec{v}_1, .., \vec{v}_n\}$.

Por tanto, de la relación $f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j$, $1 \leq j \leq N$, se ~~deduce~~ deduce que

$$M_{B \to B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

En esencia, lo que hemos hecho ha sido encontrar un sistema de referencia (una base de $\mathbb{R}^N$ formada por autovectores) en el cual la matriz asociada a la aplicación lineal f, es diagonal; una forma muy sencilla de una matriz para hacer cálculos.

Esta es una de las primeras ~~consecuencias~~ razones por las que es interesante diagonalizar una matriz. Encontramos un sistema de referencia donde es sencillo hacer cálculos matriciales.

otras muchas razones se derivan del significado físico de autovalores y autovectores que vemos viendo en la hoja de ejercicios.

Origen histórico: D'Alembert entre 1743 y 1758 estudió un primer problema de autovalores en un problema de vibraciones, la ecuación de ondas.

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Sea $f: V \to V$ un endomorfismo (apl. lineal o tensor)

Se dice que $\lambda \in K$ es un valor propio ó autovalor de f si existe un vector NO NULO v, llamado vector propio o autovector de modo que

$$f(v) = \lambda v.$$

Si A es la matriz asociada a f (en ciertas bases), entonces λ es un valor propio de A si existe un vector (propio) NO NULO v tal que

$$Av = \lambda v, \quad A \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

¿Cómo calculamos los valores y vectores propios de f ó de A?

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0 \iff v \in \ker(A - \lambda I)$$

$$\iff \ker(A - \lambda I) \neq 0$$

$$\iff \dim \ker(A - \lambda I) = n - r(A - \lambda I) \geq 1$$

$$\iff r(A - \lambda I) < n$$

$$\iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Def. Se llama polinomio característico de una matriz A al polinomio $\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Por tanto, las raíces de $\phi_A(\lambda)$ son los autovalores de A.

Dado un valor propio λ, se llama multiplicidad de λ a la multiplicidad que tiene como raíz de $\phi_A(\lambda)$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 4 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow m = 2$

$\lambda_2 = 6 \rightarrow m = 1.$

Cálculo de los vectores propios asociados.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $v \neq 0$, $v \in \ker(A - 2I)$. ; $v = (x, y, z)$

$$(A-2I)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} z = 0 \\ 4x + 5z = 0 \\ 4z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \\ y = \alpha \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(A - 2I) = \langle (0,1,0) \rangle$

$\boxed{\lambda_2 = 6}$

$$(A-6I)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -4x + z = 0 \\ 4x - 4y + 5z = 0 \end{array}\right\} \quad z = \alpha \rightarrow x = \frac{\alpha}{4}$$

$$4y = 4x + 5z = \alpha + 5\alpha = 6\alpha \rightarrow y = \frac{3}{2}\alpha$$

$\ker(A - 6I) = \langle (\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 1) \rangle$

Propiedades (de los subespacios de vectores propios)

1) $\ker(A-\lambda I) \neq 0$, es decir, $\dim(\ker(A-\lambda I)) \geq 1$.

2) $\dim \ker(A-\lambda I) \leq m(\lambda)$ la multiplicidad del autovalor λ.

3) $\dim \ker(A-\lambda I) = n - r(A-\lambda I)$

4) La suma de subespacios propios es directa, es decir, vectores propios asociados a distintos valores propios son siempre linealmente independientes.

Def. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo (apl. lineal ó tensor). Se dice que f es diagonalizable si existe una base B de $\mathbb{R}^n$ respecto de la cual la matriz asociada a f es diagonal, es decir,

$$M_{B\to B}(f) = \text{diagonal}.$$

Desde el punto de vista de las matrices, A es diagonalizable si existen una matriz diagonal D y una matriz invertible P de modo que

$$A = PDP^{-1}.$$

TEOREMA

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo y $A = M_{C\to C}(f)$. Entonces:

A es diagonalizable si y sólo si se cumple:

(a) Los valores propios de A son reales (no complejos)

(b) $\dim \ker(A-\lambda I) = m(\lambda)$ para cada autovalor λ, es decir, la dimensión de cada subespacio propio coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado.

En este caso, si B es la base de vectores propios, entonces

$$\underbrace{M_{C\to C}(f)}_{A} = \underbrace{M_{B\to C}(Id)}_{P}\ \underbrace{M_{B\to B}(f)}_{D}\ \underbrace{M_{C\to B}(Id)}_{P^{-1}}$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \text{vectores propios por columnas} \\ \text{en igual orden que los} \\ \text{valores propios} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-4-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2$, $m(\lambda_1 = 2) = 2$

$\lambda_2 = -4$, $m(\lambda_2 = -4) = 1$.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\ker(A - 2I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 parámetros

$4x + 2y - 6z = 0$

$z = \alpha$, $y = \beta$ $\to$ $4x = 6z - 2y = 6\alpha - 2\beta$

$x = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -4}$ $\ker(A + 4I)$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x = 0 \\ 6y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array}\right\} \quad x = y = 0 \quad z = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A es diagonalizable y se tiene

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

UN PAR DE APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACION

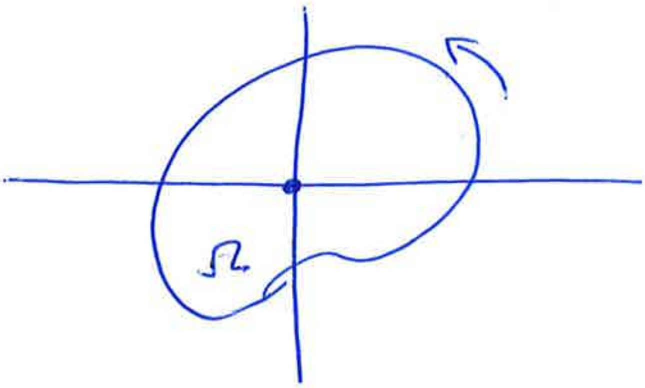
1) MATRICES SIMÉTRICAS. Recordemos A es simétrica si $A = A^T$.

PROPIEDADES

- Toda matriz simétrica es diagonalizable
- La base de vectores propios es ortogonal (respecto del producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^n$).
- ~~La~~ Se puede encontrar una matriz de paso ortogonal, es decir, $P^{-1} = P^T$.

Ejemplo. (Ejercicio 2: Tensor de inercia de un sólido rígido)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ región ocupada por un sólido ~~bidimensional plano~~.



m ~~= masa de Ω~~.

~~ρ ≡ densidad de masa~~

$\rho \equiv$ densidad de masa

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

~~$I_{xx} = $~~

Para el caso en que Ω se reduce a una masa puntual m que ocupa la posición (x, y, z) se tiene:

$$I_{xx} = m(y^2+z^2) \qquad I_{yy} = m(z^2+x^2) \qquad I_{zz} = m(x^2+y^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -mxy \qquad I_{yz} = -myz \qquad I_{zx} = -mzx.$$

Supongamos que en dimensión 2 tenemos el tensor (de inercia)

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \equiv \text{matriz simétrica.}$$

Los valores propios de I se llaman "momentos principales de inercia" y los vectores propios "direcciones principales de inercia".

Vamos a calcular los momentos y direcciones principales de inercia del tensor $\underline{I}$.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 25+\lambda^2-10\lambda-16$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{10\pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{2}{2} = 1. \end{cases}$$

$\lambda_1 = 9 \qquad m(\lambda_1 = 9) = 1$

$\lambda_2 = 1. \qquad m(\lambda_2 = 1) = 1$

$\boxed{\lambda_1 = 9}$ $\quad \ker(I - 9I_2) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array}\right\} \quad y = \alpha \rightarrow x = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1 = (1,1), \quad \|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\boxed{\vec{v}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).}$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\quad \ker(I - \cancel{9}I_2)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4x + 4y = 0 \; ; \; y = \alpha \rightarrow x = -\alpha \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_2 = (-1,1), \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$\boxed{\vec{v}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)}$$

~~$P = P^T$~~ $\qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1} D P \quad , D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P es ortogonal $\quad P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Interpretación geométrica

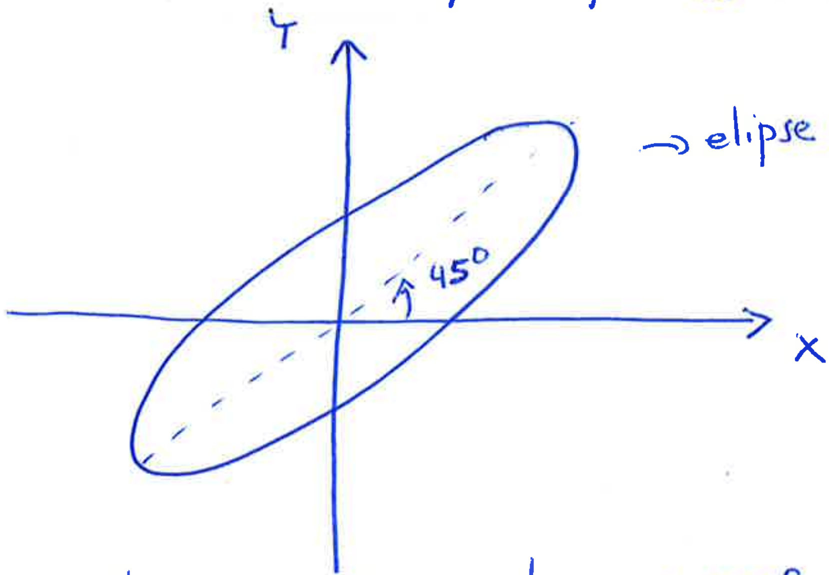
Consideremos la elipse asociada a I, es decir, la elipse de ecuación

$$(x,y)\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 1$$

Calculando:

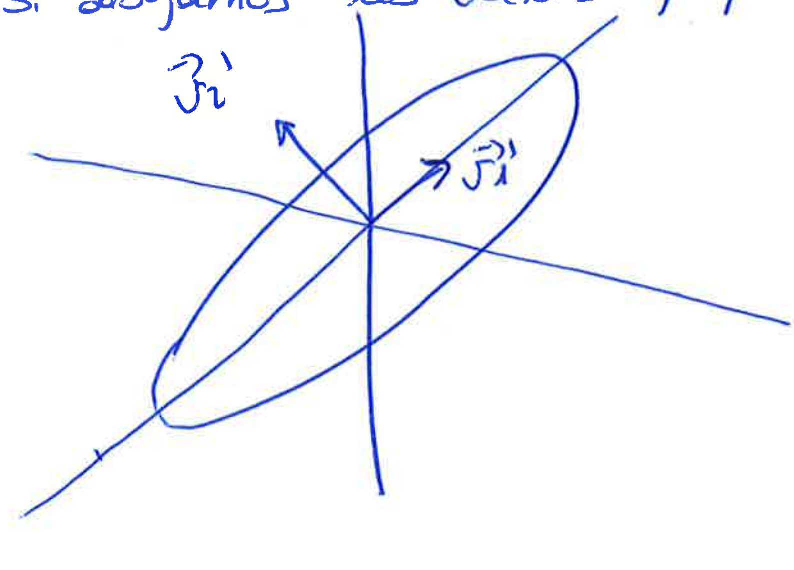
$$(x,y)\cdot\begin{pmatrix}5x+4y\\ 4x+5y\end{pmatrix} = 5x^2+4xy+4xy+5y^2$$
$$= \boxed{5x^2+8xy+5y^3 = 1}$$

Si dibujamos esta elipse (p.e. con Maxima) obtenemos



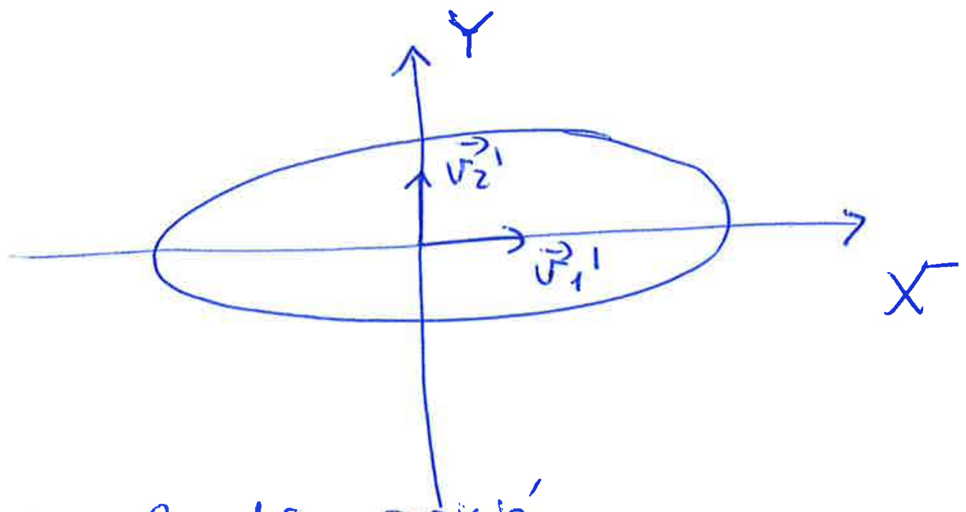
→ elipse en la base cartesiana $\{\vec{i}=(1,0), \vec{j}=(0,1)\}$

Si dibujamos los vectores propios $\vec{v}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\vec{v}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$



Por tanto, en el sistema de referencia

$B = \{ \vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}' \}$ de vectores propios tenemos



Si en la descomposición

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplicamos por la izquierda por (x,y) y por la derecha por (x,y) se tiene:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \underbrace{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)}_{X}{}^2 + 1 \cdot \underbrace{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)}_{Y}{}^2$$

$$= 9X^2 + Y^2$$

es decir en coordenadas (X, Y) en la base B de autovectores, la ~~di~~ elipse tiene la forma de la última figura.